

Легеза В.П.Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**Нещадим О.М.**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**Дичка А.І.**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ НА ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОВЕРХНІ З ЦИКЛОЇДАЛЬНОЮ ТВІРНОЮ

Найкоротший шлях між двома точками на землі називається геодезичною. В перших постановках задач пошук зазначених кривих було здійснено на поверхні землі, звідки і походить їх назва. Земля в таких задачах розглядалася як еліпсоїд обертання або сфероїд. На сьогодні існують дві постановки геодезичних задач: 1). пряма задача щодо знаходження кінцевої точки геодезичної лінії за її початковою точкою, початковим азимутом і довжиною; 2). обернена задача щодо знаходження найкоротшого шляху між двома даними точками на поверхні сфероїда. В переважній низці раніше розв'язаних задач траєкторії геодезичних кривих були визначені на поверхнях, які мають осьову симетрію: еліпсоїд обертання (сфероїд), сфера, прямий круговий циліндр. Для цього було використано числове інтегрування відповідних диференціальних рівнянь другого порядку, які описують форму цих кривих. В сучасних дослідженнях було розроблено нові та вдосконалено старі алгоритми і програмні комплекси стосовно швидкості і, головне, точності обчислень геодезичних кривих.

В цій роботі розглянуто обернену задачу (в другій постановці), тільки замість сфероїда для дослідження було обрано іншу поверхню. Зазначена поверхня є трансцендентною і представляє собою положину розрізаного вздовж горизонтальної площини симетрії горизонтально розташованого циліндра, напрямна якого є циклоїдою, а твірні є паралельними горизонтальній осі. Було поставлено і розв'язано нову задачу варіаційного числення про пошук геодезичних ліній на трансцендентній поверхні. Побудовано функціонал шляху та за допомогою класичних рівнянь Ейлера отримано диференціальне рівняння кривої, яке інтегрується у замкненій формі. Встановлено алгебраїчне рівняння просторової геодезичної кривої у параметричній формі, яке задовольняє задані граничні умови крайової задачі. Проведено числовий експеримент та здійснено візуалізацію отриманих результатів.

Результати запропонованого дослідження доцільно застосувати для розв'язання логістичних та транспортних задач, при проектуванні спортивних об'єктів та атракціонів.

Ключові слова: геодезична крива, сфероїд, циклоїда, трансцендентна поверхня, варіаційне числення, рівняння Ейлера, крайова задача, логістика.

Постановка проблеми. Геодезична лінія є узагальненням поняття прямої на викривлені (неєвклідові) простори: така лінія для двох близько розташованих точок буде найкоротшою. Зокрема, геодезичними лініями будуть: а). на площині – пряма; б). на сфері – велике коло; в). на еліпсоїді, в загальному випадку, це незамкнена крива, що задається через еліптичні довготу і широту.

Найкоротший шлях між двома точками на землі, яку прийнято розглядати як еліпсоїд обертання (або сфероїд), також називається геодезичною. Зазвичай розглядаються дві постановки гео-

дезичних задач: 1). пряма задача на знаходження кінцевої точки геодезичної лінії за її початковою точкою, початковим азимутом і довжиною; 2). обернена задача знаходження найкоротшого шляху між двома даними точками на поверхні сфероїда. Можна показати, що кожна задача еквівалентна розв'язанню геодезичного трикутника із двома сторонами та їх кутом (азимут у першій точці α_1 у випадку прямої задачі та різницю довгот λ_1 у випадку оберненої задачі). Зазначимо, що переважна частина задач, пов'язаних із пошуком геодезичних кривих, стосується їхнього визна-

чення на поверхнях типу еліпсоїда обертання (сфероїда) та пов'язана з числовим інтегруванням відповідних диференціальних рівнянь, які описують ці криві.

Сучасні роботи в цій області присвячені саме вдосконаленню алгоритмів і програмних комплексів стосовно швидкості і, головне, точності обчислень цих кривих. Цей напрям сучасних досліджень пов'язаний, наприклад, із розв'язанням цілком прагматичної практичної проблеми прокладання найкоротших логістичних маршрутів для літаків під час перельотів навколо земної кулі на далекі відстані.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Основи вирішення проблем пошуку геодезичних кривих були закладені Лежандром [1], Оріані [2–4], Бесселем [5], Гельмертом [6] та Гауссом [7]. Бессель вперше розробив процедуру розв'язання геодезичної задачі для еліпсоїда обертання з використанням рядів, а для спрощення аналізу результатів обчислень ним було наведено відповідні таблиці. Спираючись на результати зазначених робіт, Вінценті [8, 9] розробив відповідні алгоритми для розв'язання геодезичних задач, придатних для перших програмованих настільних калькуляторів. Наведено компактні формули для прямих і обернених розв'язків геодезичних будь-якої довжини. Існуючі формули було перероблено для ефективного програмування, щоб заощадити обсяг пам'яті та скоротити час обчислень. Головною особливістю нових формул є використання вкладених рівнянь для еліптичних членів. Обидва розв'язки є ітераційними. Запропоновані алгоритми та програми і до сьогодні широко використовуються в сучасних комп'ютерах.

Суттєве вдосконалення процесів алгоритмізації методики Вінценті з пошуку геодезичних та узагальнення попередніх досліджень інших авторів у цій області знань виконав Рап [10]. Матеріали цієї роботи охоплюють всі аспекти земних і небесних координатних систем та систем відліку в геодезії: від історичних геодезичних даних до сучасних національних і міжнародних систем відліку та перетворень між ними. Робота поділена на дві частини, перша присвячена земним системам відліку, а друга – небесним системам відліку, де остання зосереджена, насамперед, на переході до першої. Детально висвітлено геометрію еліпсоїда обертання, а також астрономічні координати та астрогеодезичні методи.

В роботі Карні [11] наведено осучаснені алгоритми обчислення геодезичних на еліпсоїді обертання. Вони забезпечують точні, надійні та

швидкі рішення прямих і обернених геодезичних задач і дозволяють встановлювати диференціальні та інтегральні властивості геодезичних кривих. Точність алгоритмів в [11] була підвищена з метою відповідності стандартній точності більшості потужних комп'ютерів. Ця відносно проста задача була розв'язана за рахунок утримання достатнього числа членів у відповідних відрізках рядів і була реалізована з невеликими обчислювальними витратами. В статті [12] використано гамільтонівське формулювання геодезичних рівнянь для аналізу властивостей їх інтегровності. Зокрема, була проаналізована поведінка геодезичних на поверхнях, визначених сферичними гармоніками. Із залученням теореми Моралеса-Раміса та алгоритму Ковачіча [13] було доведено, що геодезичні рівняння на всіх поверхнях, визначених секторальними гармоніками, не є інтегровними. Щоб продемонструвати порушення регулярного руху, використано перерізи Пуанкаре. В статті [14] наведено загальні поняття і теоретичні підходи до визначення геодезичних кривих на многовидах загального типу. Наведено функціонал довжини кривої, першу і другу варіації цього функціоналу та диференціальне рівняння геодезичної кривої на двовимірній поверхні. В статті [15] досліджується центральна проекція для сфероїда, для якої відповідною характеристикою є те, що великі еліптичні лінії проектується в прямі. Маючи карту, отриману з центральної проекції, пілот може спланувати великий круговий маршрут, провівши на ньому пряму лінію від початкової точки до пункту призначення. Після встановлення цієї лінії пілоту стає зрозумілим розташування міст і географічних об'єктів на карті.

У статті Рейнсфорда [16] розглядається практичне застосування формул для обчислення довгих ліній на еліпсоїді. Основною метою цього дослідження є усунення звичайно необхідного в таких задачах послідовного наближення. Для оберненої задачі це досягається за допомогою методу Содано [17]. Для прямої задачі використовується адаптація методу, створеного Маккоу [18]. Наведено результати п'яти практичних прикладів, у тому числі двох, які найбільш поширені. Надаються рекомендації з побудови спеціальних таблиць для спрощення обчислень в геодезичних задачах, які найчастіше зустрічаються.

В навчально-наукових замітках [19] міститься детальний вивід рівнянь для розв'язання прямої і оберненої задач про встановлення геодезичних кривих на еліпсоїді. Процедура виводу цих рівнянь можна назвати методом Бесселя, який

вперше був оприлюднений в його оригінальній статті [5]. Отримані в роботі [19] рівняння мають дещо іншу форму, ніж представлені Бесселем, але вони ведуть безпосередньо до рівнянь, представлених Рейнсфордом [16] і Вінценті [8, 9], та в подальшому до створення методу, подібного до наведеного в роботі Рапа [10]. Розуміння методів, представлених в [19], зокрема обчислення еліптичних інтегралів шляхом розкладання в ряд, дає досліднику уявлення про інші геодезичні розрахунки.

Огляд робіт, опублікованих раніше у даному науковому напрямку, свідчить про те, що варіаційні задачі щодо пошуку геодезичних ліній розглядалися переважно на тілах обертання: на сфері, еліпсоїді обертання (сфероїді), прямому круговому циліндрі, що пояснюється практичною стороною питання (логістика на великих відстанях на поверхні землі). Причому основна увага іншими авторами приділялася числовому розв'язанню відповідних диференціальних рівнянь, оскільки постановки задач не дозволяли визначити рівняння геодезичних кривих в замкненій аналітичній формі.

У цій статті вперше розглядається варіаційна задача про пошук геодезичних ліній на циліндричній трансцендентній поверхні. Трансцендентна поверхня представляє собою горизонтальний циліндр, утворений з двох однакових частин, прямою кожної з них є циклоїда, а його твірні паралельні горизонтальній осі. Новизна дослідження полягає в тому, що по-перше, ця поверхня

не є поверхнею обертання, а до-друге, розв'язок цієї задачі вдається встановити у замкненій аналітичній формі. Практична сторона питання щодо необхідності розгляду геодезичних на таких поверхнях висвітлена в роботі [20], яка присвячена розробці ізохронних поглиначів вимушених коливань низькочастотних динамічних систем.

Постановка завдання. Мета дослідження: на зазначеній вище трансцендентній поверхні методами класичного варіаційного числення визначити рівняння геодезичних ліній в аналітичній формі.

Виклад основного матеріалу. Побудова функціоналу шляху і визначення диференціального рівняння геодезичної кривої. Нагадаємо, що геодезичною лінією між двома заданими точками M і N на певній поверхні називається така просторова крива, шлях по якій між точками M і N є **найменшим**.

Введемо просторову систему координат так, як це вказано на рис. 1. Параметричні рівняння трансцендентної прямої кривої (циклоїди) визначаються двома координатами $y(\theta)$ (ордината) і $z(\theta)$ (апліката) точки на цій кривій:

$$\begin{cases} y(\theta) = R(\theta - \sin \theta); \\ z(\theta) = R(1 + \cos \theta). \end{cases} \quad (1)$$

де θ – параметр циклоїди, а R – її характеристика; $\theta \in [0; 2\pi]$

Отже, потрібно визначити залежність першої координати – абсциси $x(\theta)$ від параметра θ так, щоб просторова траєкторія між наперед заданими

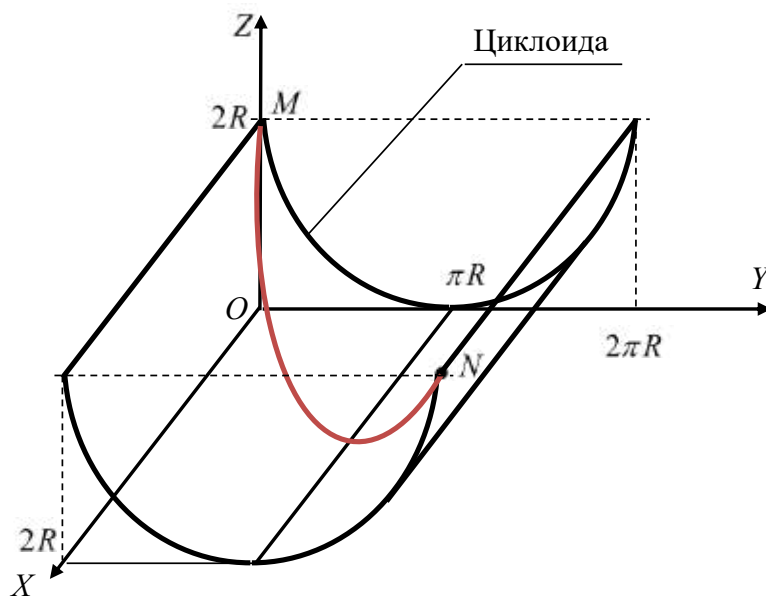


Рис. 1. До пошуку геодезичних на трансцендентній поверхні

на цій поверхні точками M і N мала б найменшу довжину.

Нехай точки, про які було сказано вище, мають наступні координати: $M_{st}(0;0;2R)$ – стартова і $N_f(2R;2\pi R;2R)$ – фінішна. Стартова точка визначається параметром $\theta = 0$, а фінішна – $\theta = 2\pi$. Ці дані описують граничні умови в нашій майбутній варіаційній задачі: $x(0) = 0$, $x(2\pi) = 2R$.

Користуючись співвідношеннями (1) запишемо вираз для диференціала довжини дуги ds кривої MN , що лежить на трансцендентній поверхні:

$$ds = \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\theta'_x)^2} dx. \quad (2)$$

Тепер можна записати функціонал шляху, який потрібно мінімізувати:

$$L(K) = \int_{MN} ds = \int_{MN} \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\theta'_x)^2} dx \rightarrow \min_K. \quad (3)$$

Тут через $L(K)$ позначено довжину кривої K , що належить множині довільних кривих $MN = \{K(x(\theta), y(\theta), z(\theta))\}$, по яких може рухатись матеріальна точка, що лежить на трансцендентній поверхні; θ – параметр, $\theta \in [0, 2\pi]$. Саме цей функціонал потрібно мінімізувати, знайшовши потрібну криву із зазначеної множини.

Позначимо підінтегральну функцію у виразі (3) через $F(x, \theta, \theta')$. Отже, маємо:

$$F(x, \theta, \theta') = \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\theta'_x)^2}. \quad (4)$$

Для визначення рівняння шуканої кривої використаємо класичне диференціальне рівняння Ейлера [21]:

$$F'_\theta - \frac{d}{dx}(F'_{\theta'}) = 0. \quad (5)$$

Спочатку визначимо відповідні частинні похідні, які входять у рівняння (5). Запишемо F'_θ :

$$F'_\theta = R^2 \sin \theta \cdot (\theta'_x)^2 / \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\theta'_x)^2}. \quad (6)$$

Знайдемо $F'_{\theta'}$, використовуючи (4):

$$F'_{\theta'} = 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \theta'_x / \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\theta'_x)^2}. \quad (7)$$

Тепер визначимо похідну $(F'_{\theta'})'_x$:

$$\frac{d}{dx}(F'_{\theta'}) = \frac{4R^2 \left[\frac{(\theta'_x)^2}{2} \cdot \sin \theta + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \theta''_{xx} + R^2 \sin \theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\theta'_x)^4 \right]}{\left(1 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\theta'_x)^2\right)^{3/2}} \quad (8)$$

Підставимо вирази (6) та (8) у рівняння Ейлера (5). В результаті тотожних перетворень, які тут не наводимо, дістанемо диференціальне рівняння другого порядку з відповідними граничними умовами (крайова задача):

$$2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \theta''_{xx} + (\theta'_x)^2 = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(2\pi) = 2R. \quad (9)$$

Отримане рівняння інтегрується в замкненій формі. Покажемо це.

Знаходження алгебраїчного рівняння геодезичних ліній.

Для зниження порядку рівняння на одиницю зробимо таку заміну:

$$p(\theta) = \theta'_x \Rightarrow \theta''_{xx} = p'(\theta)p(\theta). \quad (10)$$

Після підстановки нової змінної у рівняння (9) дістанемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$2 \operatorname{tg}(\theta/2) \cdot p'(\theta) \cdot p(\theta) + p^2(\theta) = 0. \quad (11)$$

Тривіальний розв'язок $\theta'_x = p(\theta) = 0$ нас не цікавить, бо дає сталий результат:

$$\theta(x) = C_0 = \text{const}.$$

Розглянемо рівняння (11) після скорочення на $p(\theta) \neq 0$:

$$2 \operatorname{tg}(\theta/2) p'(\theta) + p(\theta) = 0. \quad (12)$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними, яке одразу інтегрується:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \Rightarrow \ln p = -\ln \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \ln C_1. \end{aligned}$$

Звідси знайдемо функцію θ'_x :

$$p(\theta) = \theta'_x = C_1 / \sin(\theta/2). \quad (13)$$

Інтегруємо рівняння (12), в результаті дістанемо функцію $x(\theta)$:

$$x(\theta) = \left[C_2 - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] / C_1. \quad (14)$$

Знайдемо невідомі сталі C_1 та C_2 з граничних умов у рівнянні (9):

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 2, \quad x(2\pi) = 2R \Rightarrow C_1 = 2/R. \quad (15)$$

Тепер розв'язок (13) з використанням (14) набуває такого вигляду:

$$x(\theta) = R[1 - \cos(\theta/2)]. \quad (16)$$

Рівняння (16) описує залежність абсциси x точки від параметра θ . Приєднавши отриману функцію $x = x(\theta)$ до рівнянь напрямної кри-

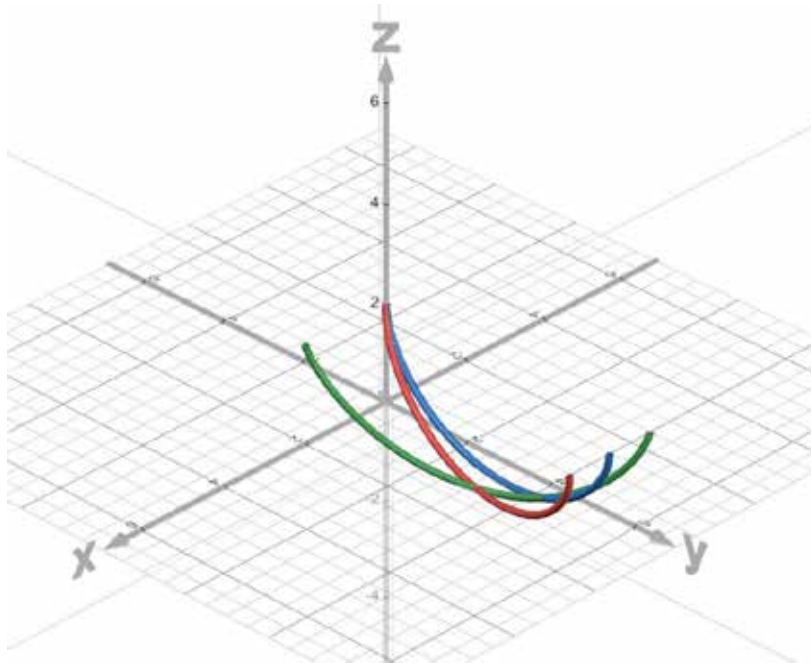


Рис. 2. Візуалізація отриманих результатів

вої (1), повністю визначимо шукану просторову криву в параметричній формі:

$$L_1(\theta) = \{R[1 - \cos(\theta/2)], R(\theta - \sin \theta), R(1 + \cos \theta)\}, \quad (17)$$

де θ – параметр, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Графічна інтерпретація отриманих результатів. За результатами дослідження був проведений числовий експеримент з метою аналізу відповідних геодезичних кривих для трьох пар точок (рис. 2).

Для ілюстрації показані три геодезичних криві, одна з них задана формулою (17) і її графік на рис. 2 має червоний колір. Дві інші криві знайдені аналогічно попередній, але за умови проходження цих геодезичних через дві пари інших заданих точок:

$L_2 : \{M_{st}(0; 0; 2R), N_f(R, 2\pi R, 2R)\}$ – геодезична крива синього кольору;

$L_3 : \{M_{st}(2R; 0; 2R), N_f(0; 2\pi R; 2R)\}$ – геодезична зеленого кольору, ($R = 1$).

Висновки. Розв'язано нову задачу варіаційного числення про пошук геодезичних ліній на трансцендентній поверхні. Поверхня представляє собою горизонтальний циліндр, напрямна якого є циклоїдою, а твірні паралельні горизонтальній осі абсцис. За допомогою класичних рівнянь Ейлера отримано диференціальне рівняння шуканої кривої, яке інтегрується у замкненій формі. Встановлено алгебраїчне рівняння геодезичної у параметричній формі, яке задовольняє задані граничні умови. Проведено числовий експеримент, в результаті якого було продемонстровано ряд графіків геодезичних кривих для трьох пар заданих на трансцендентній поверхні точок.

Результати проведеного дослідження будуть корисними як науковим спеціалістам-теоретикам в області варіаційного числення, так і інженерам-практикам в галузях логістики, спорту, геодезії та картографії.

Список літератури:

1. Legendre A.-M. Analyse des triangles tracées sur la surface d'un sphéroïde. Mém de l'Inst Nat de France, 1806, 1st sem, p.p. 130–161. <http://books.google.com/books?id=-d0EAAAAAQAQJ&pg=PA130-IA4>
2. Oriani B. Elementi di trigonometria sferoidica, Pt. 1. Mem dell'Ist Naz Ital., (in Italian). 1806, 1(1):118–198. <http://books.google.com/books?id=SydFAAAAcAAJ&pg=PA118>
3. Oriani B. Elementi di trigonometria sferoidica, Pt. 2. Mem dell'Ist Naz Ital., (in Italian). 1808, 2(1):1–58. <http://www.archive.org/stream/memoriadellistit21isti#page/1>
4. Oriani B. Elementi di trigonometria sferoidica, Pt 3. Mem dell'Ist Naz Ital., (in Italian). 1810, 2(2):1–58. <http://www.archive.org/stream/memoriadellistit22isti#page/1>
5. Bessel F. W. Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen. AstronNachr., 1825, 4(86): 241–254. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1825AN....4.241B>

6. Helmert F.R. Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, 1880, V.1. Teubner, Leipzig. <http://books.google.com/books?id=qt2CAAAIAAJ>
7. Gauss C.F. General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825. Princeton university library, 1902. Переклад: James Caddall Morehead, Adam Miller Hildebeitel. Оцифровано 13 сер. 2008, 126 стор.
8. Vincenty, Thaddeus (*April 1975a*). Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the Ellipsoid with application of nested equations. *Survey Review. XXIII (176)*: 88–93. <https://doi.org/10.1179/sre.1975.23.176.88>
9. Vincenty, Thaddeus (*August 1975b*). Geodetic inverse solution between antipodal points (*Technical report*). DMAAC Geodetic Survey Squadron. <https://doi.org/10.5281/zenodo.32999>
10. Rapp R.H. Geometric Geodesy, part 2. 1993. Ohio State University Department of Geodetic. Science and Surveying. <http://hdl.handle.net/1811/24409>
11. Charles F. F. Karney. Algorithms for geodesics. *J. Geodesy*, 87(1), 43-55 (2013). <https://doi.org/10.1007/s00190-012-0578-z>
12. Waters Thomas J. Regular and irregular geodesics on spherical harmonic surfaces. arXiv:1112.3231v1 [math.DS], 2011, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1112.3231>
13. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symb. Comp.* (1986), V. 2, No 1, p.p.3-43. [https://doi.org/10.1016/S0747-7171\(86\)80010-4](https://doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80010-4)
14. Геодезичні на тривісному еліпсоїді. Вікіпедія. GeographicLib: Geodesics on a triaxial ellipsoid. geographiclib.sourceforge.io.
15. Bowring B.R. The central projection of the spheroid and the surface line. *Surv. Rev.* 1997, 34 (265): 163–173. <https://doi.org/10.1179/sre.1997.34.265.163>
16. Rainsford H. F. Long geodesics on the ellipsoid. *Bulletin Géodésique*. V. 37: 12–22 (1955). <https://doi.org/10.1007/BF02527187>
17. Sodano E.M. Inverse computation for long lines; a non-iterative method based on the true geodesic. Technical Report No. 7, Aug. (1950).
18. McCaw G.T. *Empire Survey Review*. Vol. II, 156–163, 346–352, 505–508.
19. Deakin R.E. and Hunter M.N. Geodesics on an ellipsoid – Bessel's Method. School of Mathematical & Geospatial Sciences, RMIT University, GPO Box 2476V, Melbourne, Australia. 3rd edition: July 2023. – 66 p.
20. Legeza V.P., Dychka I.A. Mathematical Modeling of Dynamic Processes in Connected Systems with Isochronic Roller Vibration Absorbers. Kyiv, "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 2024. – 208 p. ISBN 978-966-990-132-3
21. Eltsgolts L.P. *Differential Equations and Variational Calculus*. University Press of the Pacific. 2003. – 444 p. ISBN 978-141-021-067-8

Leheza V.P., Neshchadym O.M., Dychka A.I. DETERMINATION OF GEODESIC LINES ON A CYLINDRICAL SURFACE WITH A CYCLOIDAL CONSTITUENT

The shortest path between two points on the earth is called a geodesic. In the first set of problems, the search for the specified curves was carried out on the surface of the earth, which is where their name comes from. In such problems, the Earth was considered as an ellipsoid of rotation or a spheroid. Today, there are two sets of geodetic problems: 1). a direct task of finding the end point of a geodesic line by its starting point, initial azimuth and length; 2). the inverse problem of finding the shortest path between two given points on the surface of a spheroid. In the majority of previously solved problems, the trajectories of geodesic curves were determined on surfaces that have axial symmetry: an ellipsoid of rotation (spheroid), a sphere, a straight circular cylinder. For this, the numerical integration of the corresponding second-order differential equations that describe the shape of these curves was used. In modern research, new and improved algorithms and software complexes have been developed in relation to the speed and, most importantly, the accuracy of geodesic curve calculations.

In this work, the inverse problem is considered (in the second formulation), only instead of a spheroid, another surface was chosen for the study. The specified surface is transcendental and represents half of a horizontally located cylinder cut along the horizontal plane of symmetry, the direction of which is a cycloid, and the generators are parallel to the horizontal axis. A new calculus problem of finding geodesic lines on a transcendental surface was set and solved. The path functional is constructed and with the help of Euler's classical equations, the differential equation of the curve is obtained, which is integrated in a closed form. The algebraic equation of the spatial geodesic curve in the parametric form is established, which satisfies the given boundary conditions of the boundary value problem. A numerical experiment was conducted and the obtained results were visualized.

The results of the proposed study should be used to solve logistical and transport problems, in the design of sports facilities and attractions.

Key words: geodesic curve, spheroid, cycloid, transcendental surface, calculus of variations, Euler equation, boundary value problem, logistics.